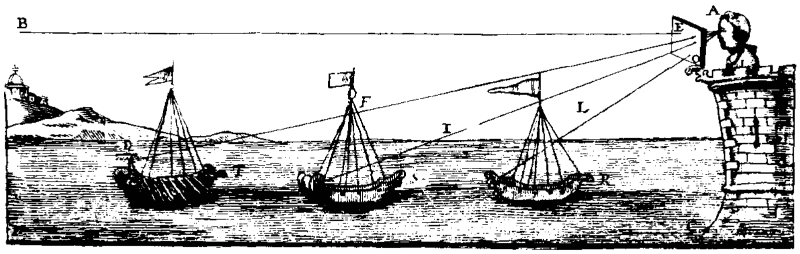

ORGANIZACIONES MATEMÁTICAS Y DIDÁCTICAS EN TORNO AL OBJETO DE «LÍMITE DE FUNCIÓN»: UNA PROPUESTA METODOLÓGICA PARA EL ANÁLISIS*

ESPINOZA, LORENA[1] y AZCÁRATE, CARMEN[2]
[1] Universidad de Santiago de Chile
[2] Universidad Autónoma de Barcelona

SUMMARY

Our research falls within the general field of the analysis of the teacher's activity and focuses on the specific case of teaching the concept of «limit to the function» in the Spanish secondary school system. Using the anthropological focus of didactics (Chevallard, 1998) as a general theoretical frame, we propose an investigative methodology for the analysis of mathematical organizations recreated by the teacher in the classroom in collaboration with his/her pupils and the respective didactic organizations that allow their reconstruction.

ANTECEDENTES PARA LA INVESTIGACIÓN

El interés inicial de nuestro trabajo consistía en analizar la actuación del profesor en su tarea de organización y conducción del proceso de enseñanza y aprendizaje relativo al concepto de *límite de función* en secundaria.

El primer punto de vista que adoptamos para abordar esta cuestión provenía del llamado paradigma del «pensamiento del profesor» o del «conocimiento del profesor» de matemáticas. Nos proponíamos analizar el tipo de conocimiento que moviliza el profesor cuando se enfrenta con la tarea de preparar la enseñanza de este concepto matemático, el conocimiento que efectivamente utiliza para gestionar su correspondiente proceso de enseñanza en el aula y las dificultades asociadas a dicho proceso.

Dado que esta problemática trataba de la enseñanza de un concepto matemático del análisis, nos pareció pertinente recurrir además a un enfoque en didáctica de las matemáticas que abordara la cuestión específica del llamado *pensamiento matemático avanzado* (Dreyfus, 1990, 1991; Tall, 1994).

De este modo, uno de nuestros primeros objetivos de investigación consistió en la articulación de estos dos grandes paradigmas de investigación en didáctica para abordar nuestro problema específico, esto es: *el estudio del pensamiento del profesor y de su práctica en la enseñanza de un conocimiento matemático determinado*. Esta investigación parecía ser altamente atractiva y productiva para la didáctica de las matemáticas, sobre todo por la escasez de estudios relativos a la *enseñanza* del límite de función, en oposición a la extensa bibliografía relativa al *aprendizaje* del mismo.

La exploración del primer paradigma anunciado, esto es, del pensamiento del profesor, orientación que ha logrado un importante desarrollo y productividad reflejada en numerosos trabajos (Marcelo, 1987), nos permitió adentrarnos en las estrategias utilizadas para abordar la problemática del profesor. Sin embargo, nos enfrentó con dos grandes dificultades que podríamos resumir de la siguiente forma: la primera dificultad es, a nuestro entender, de naturaleza esencialmente epistemológica, y se genera al no contar con una modelización del conocimiento matemático; la segunda se relaciona con el cómo analizar el pensamiento o conocimiento del profesor sobre determinados contenidos de enseñanza sin considerar el análisis, para nosotras ineludible, de su práctica o actividad docente. Se trata de una dificultad de naturaleza esencialmente metodológica, pero cuya génesis es de carácter teórico.

En esta etapa de la investigación y, considerando nuestro objetivo de articulación antes mencionado, pensamos que el enfoque del *pensamiento matemático avanzado* podría ayudarnos a superar la primera dificultad antes señalada. Es bien sabido que se trata de una orientación hoy día dominante en didáctica de las matemáticas para la investigación en el área del cálculo, y que ha realizado grandes aportes para el aprendizaje de conceptos matemáticos de nivel superior (Tall, 1991). No obstante, al intentar incorporar sus principios teóricos y metodológicos para la realización de nuestra investigación nos enfrentamos con algunos inconvenientes. Estos impedimentos están relacionados, en general, con la necesidad de contar con un modelo de la *actividad matemática* que permita analizar la actividad que el profesor realiza y, que hace realizar a sus alumnos, y no sólo con modelos de los procesos cognitivos en la construcción de conceptos matemáticos.

Para intentar resolver la segunda dificultad, decidimos considerar un modelo teórico que nos permitiera estudiar la *actividad del profesor*. Fue así como recurrimos a la *teoría de la actividad* de la escuela soviética de psicología y a su punto de vista sociocultural de la construcción del conocimiento (Leontiev, 1975; Davidov et al., 1982; Galperín, 1982). Este enfoque incorpora un modelo de la *actividad humana* que debería permitir el estudio de la actividad que se realiza en la relación didáctica, tanto de enseñanza como de aprendizaje. No obstante, al no considerar la especificidad del conocimiento matemático, terminamos por encontrarnos con una ya conocida dificultad para nosotras: ¿cómo integrar lo matemático a este modelo psicocognitivo?

Llegados a este punto del recorrido en nuestro trabajo, decidimos reproblematizar nuestro tema de investigación, optando por recurrir a un marco teórico que partía situándose en el centro del *conocimiento matemático* que el profesor tiene que enseñar y, además, en la *actividad matemática* que ello supone realizar. Se trata pues del *enfoque antropológico de lo didáctico* desarrollado por Yves Chevallard (1998), que se enmarca dentro del programa de investigación más general conocido como la *didáctica fundamental*. No habíamos considerado este enfoque hasta ese momento porque ni había sido aplicada dicha perspectiva con suficiente detalle a los problemas derivados de la *enseñanza del cálculo*, ni se había utilizado (hasta este último año) para analizar *la figura del profesor*. De aquí que la tarea no fuera fácil pero, al mismo tiempo, que representara un gran desafío para nosotras.

Es importante señalar aquí que la opción teórica que realizamos no es el resultado de considerar insuficientes las distintas orientaciones teóricas que existen en el ámbito de la didáctica de las matemáticas, como tampoco del desconocimiento de los importantes trabajos realizados en investigación didáctica en el área del cálculo. En este sentido, los trabajos de Michéle Artigue (1995) quien de igual forma trabaja dentro de la didáctica fundamental, han realizado importantes aportes a la investigación en este campo. Asimismo, son numerosos los estudios que han abordado de manera eficaz el problema del *aprendizaje* del cálculo (Tall, 1991). Más bien, esta decisión debe ser interpretada como la adopción teórica necesaria para realizar un trabajo de investigación que pretende abordar una problemática compleja, que requiere de variadas modelizaciones para ser estudiada, y cuya aspiración es la de contribuir al progreso de la didáctica en este campo de conocimiento específico.

MARCO TEÓRICO: EL ENFOQUE ANTROPOLÓGICO COMO OPCIÓN INTEGRADORA

El enfoque antropológico se inscribe dentro del marco general de la llamada didáctica fundamental iniciada por

Guy Brousseau en la década de los setenta, y cuya mayor contribución consistió en subrayar el carácter decisivo del conocimiento matemático en la problemática didáctica. Se propuso el análisis del saber matemático como vía de acceso para el estudio de los fenómenos didácticos, partiendo del supuesto básico que todo fenómeno didáctico tiene un componente matemático fundamental. Este postulado pone de relieve la necesidad de modelizar el conocimiento matemático que se enseña y se aprende en la institución didáctica, pero ya no a través de la adaptación de modelos exógenos provenientes de otras disciplinas que han sido construidos con fines distintos y con unos instrumentos muy diferentes. Por el contrario, deberán ser construidos por la propia didáctica de las matemáticas para analizar fenómenos didácticos. De esta forma, Brousseau elabora la teoría de las situaciones didácticas que permite abordar la problemática didáctica desde un punto de vista sistémico. Dicha teoría modeliza el «conocimiento matemático enseñado» al interior de un sistema didáctico.

El enfoque antropológico se sitúa, en primer término, en el campo más general de las prácticas y actividades humanas y, en segundo, propone un modelo del conocimiento matemático que lo considera como actividad matemática. Este enfoque se podría describir de forma progresiva partiendo de una de sus primeras y más conocidas formulaciones realizada por Yves Chevallard, llamada la *transposición didáctica* (Chevallard, 1985), y llegando hasta una de sus últimas elaboraciones que modeliza el *proceso de estudio* de una *obra* matemática por medio de la *teoría de los momentos didácticos* (Chevallard, Bosch, Gascón, 1997). Entre estos dos extremos del intervalo temporal de desarrollo fueron apareciendo sucesivos instrumentos y formulaciones teóricas que han permitido a dicho autor «poner en forma» lo que hoy podríamos definir como un cuerpo teórico didáctico.

A continuación, sólo nos referiremos de forma sintética a las nociones fundamentales para el desarrollo de nuestra investigación.

Modelización del saber matemático: noción de *organización matemática* u *obra*

La noción de *organización matemática,* la que actualmente Yves Chevallard denomina también *organización praxeológica matemática* u *obra*, permite modelizar el conocimiento matemático como actividad humana. Éste se considera como el producto destilado de una actividad de estudio sistemática e intencionada de un *tipo de cuestiones* o tareas que resultan problemáticas para una determinada comunidad en un momento histórico específico. Como toda actividad, responde a unas razones de ser específicas, y para llegar a convertir aquellas tareas problemáticas iniciales en tareas rutinarias, esto es, realizables de forma relativamente fluida y eficaz, se elaboran ciertas «maneras de hacer» o técnicas. Así, los tipos de problemas y técnicas asociadas constituyen un «saber-hacer» que hacen referencia a la práctica o la *praxis* de la actividad.

Pero para que dichas técnicas puedan existir se deben poder explicar, hacer inteligibles y justificar. Los discursos que las describen, explican y justifican constituyen la *tecnología*, y el argumento formal que permite justificar rigurosamente dicha *tecnología*, la *teoría*. Estos dos elementos conforman el *logos* para la *praxis* y se corresponde con el «saber». Así, se pueden distinguir dos niveles diferentes pero inseparables que se van construyendo y definiendo en un proceso dialéctico entre ambos: *praxis* y *logos* se hallan íntimamente relacionados y la articulación de ambos permite dar forma a la praxeología matemática. Se trata, pues, de una modelización «estática» del trabajo matemático que aparece como el producto de un proceso de elaboración continuada caracterizada por sus distintos componentes, lo que se llama comúnmente la «matemática» o el «conocimiento matemático».

Modelización de la actividad matemática: noción de *proceso de estudio* de una organización matemática

Se propone, además, un modelo «dinámico» o funcional de dicha actividad que permitirá dar cuenta del proceso de construcción de una obra matemática. Aparece la noción de *estudio,* que es considerada en un sentido muy amplio e integrador la cual se aplica a un ámbito más amplio que el del aula e, incluso, más general que el de las propias instituciones didácticas, abarcando desde la actividad matemática de los investigadores, la del economista, hasta la que realizan los alumnos. El proceso de estudio se refiere tanto al proceso de creación –o recreación– de una organización matemática como al producto de dicho proceso. Proceso y producto aluden a dos aspectos distintos del trabajo matemático pero inseparables. Existe una dialéctica entre ambos, siendo, de hecho, dos caras de una misma moneda.

El proceso de estudio se caracteriza por tener una estructura no uniforme organizada en distintas *dimensiones* o *momentos* que se distribuyen de forma dispersa a lo largo del estudio. Aquí, la palabra *momento* está tomada en el sentido de «aspecto», y no en el sentido cronológico o temporal. Estos momentos no son vividos de una sola vez y pueden presentarse simultáneamente. Para realizar una gestión adecuada del estudio se debe vigilar que cada uno de los momentos didácticos se realice *en el o los momentos oportunos*. La herramienta teórica que resume todos estos aspectos *fisiológicos* del estudio se denomina *teoría de los momentos didácticos*.

A partir de la nueva noción de *estudio* surge una concepción ampliada de la didáctica de las matemáticas. Así, la *didáctica de las matemáticas* se define como «la ciencia del estudio y de la ayuda al estudio de las matemáticas».

El proceso de estudio se organiza a través de seis momentos distintos, cada uno de los cuales queda caracterizado en función de la *organización matemática* que se estudie y sus distintos componentes. Es decir, estudiar una obra matemática es inseparable de la estructura de la obra que se estudia. Cada uno de los seis *momentos* del estudio desempeña una función específica necesaria para llevar a buen término dicho proceso. Dichos momentos son: el momento del primer encuentro, el momento exploratorio, el momento del trabajo de la técnica, el momento tecnológico-teórico, el momento de la institucionalización y el momento de la evaluación.

El *momento del primer encuentro* es la *dimensión* del estudio en la que se presenta un nuevo tipo de problemas para ser estudiado. Esto es, surge por primera vez una tarea problemática para una comunidad de estudio que no la sabe resolver y que decide, por los motivos que sea, hacer algo para conseguir resolverla. En el marco de la institución de enseñanza es el *momento* en que el profesor presenta un tipo de problemas y un entorno en el que aparecen los objetos matemáticos que lo conforman. En éste se pueden mostrar las razones de ser o el tipo de cuestiones a las cuales responde dicho problema y cuya elucidación es un elemento importante del estudio. Estas razones de ser iniciales no tienen por qué coincidir con las razones de ser reales o «sabias».

El *momento exploratorio* es la *dimensión* del proceso de estudio en que tiene lugar la indagación más específica de un tipo de problemas previamente encontrado o presentado. Es la etapa que permite establecer las fronteras del tipo de problemas en cuestión, y relacionarlo con la construcción de una *técnica* para su correspondiente estudio. El momento exploratorio acaba cuando esta técnica emerge de forma clara aunque no sea explícitamente. Desde el marco de la institución de enseñanza, es el *momento* en que el profesor hace vivir unos objetos, recientemente introducidos dentro de la problemática anunciada, en manos de los estudiantes hasta que la técnica para realizar el estudio resulte visible. La *técnica* puede emerger en manos de los alumnos o ser presentada directamente por el profesor.

Es importante señalar aquí que, en oposición a la consideración bastante extendida hoy en día que propugna la constante exploración «autónoma» de los alumnos de algunos problemas, el proceso de estudio *no termina* –ni puede terminar– en esta *dimensión exploratoria* del estudio. En estas dimensiones, las técnicas aparecen de forma aún inestable o rudimentaria, siendo necesario todavía poder rutinizarlas, dominarlas, flexibilizarlas, modificarlas, describirlas, explicarlas y justificarlas. Además, el hecho de autentificarlas como «maneras de hacer» legítimas permitirá que los estudiantes las «fijen» como elementos que pertenecen a una organización matemática específica que permite resolver cierto tipo de tareas.

Una vez que las *técnicas* para el estudio de un tipo de problemas anunciado han aparecido de forma visible como resultado de la *exploración* del mismo, se inicia el trabajo específico sobre éstas para lograr su respectiva rutinización y posterior naturalización. Así, esta *dimensión* del proceso tiene asignada distintas funciones o tareas: la puesta a punto de las *técnicas*, la búsqueda de relación entre ellas, el análisis de las limitaciones y potencia de cada una, la determinación del rango de validez de cada una, e incluso el llevarlas hasta sus últimas consecuencias, llegando a proponer, si fuera oportuno, alguna modificación o ampliación de las mismas.

Dentro de este *momento*, además de procurarse el dominio robusto de las técnicas hasta el punto de su respectiva rutinización, pueden aparecer necesidades tecnológicas y teóricas de explicar, justificar y hacer inteligibles los gestos que se realizan. Dichas necesidades pueden eventualmente sugerir la construcción de nuevas técnicas. Es por ello que esta *dimensión* del estudio desempeña un doble papel dentro del proceso. El primero consiste en promover la creación de nuevas técnicas y eventualmente de nuevos objetos matemáticos necesarios para construirlas. El segundo hace de puente intermediario entre la búsqueda de técnicas para el estudio de un tipo de problemas realizado en el *momento exploratorio* y las explicaciones y justificaciones que se establecerán en el *momento tecnológico-teórico* para las mismas.

El término *tecnología*, tal como hemos visto, hace referencia al conjunto de conocimientos que se utilizan para explicar, interpretar, hacer inteligibles y justificar tanto las técnicas que se utilizan como las prácticas que se realizan para el estudio de una *obra* matemática. Al mismo tiempo, la *teoría* engloba todos aquellos elementos propios de la disciplina matemática que garantizan y dan un sentido a la tecnología utilizada para el estudio. De esta forma, y en concordancia con la relación anteriormente señalada entre una *obra* matemática y su correspondiente *estudio*, el momento *tecnológico-teórico* es aquella *dimensión* del estudio que hace referencia a la necesidad de explicación y justificación de la actividad, es decir, en la cual aparecen los elementos tecnológicos y teóricos para el estudio en el sentido anteriormente señalado.

El *momento* de la institucionalización corresponde a la dimensión del proceso didáctico en que se hace visible y se oficializa la actividad desarrollada hasta aquel instante. Es la *dimensión* en que se le otorga un «nombre» y un estatuto al conocimiento matemático que ha ido apareciendo de manera informal, legitimándolo como conocimiento matemático que pertenece a la *organización matemática* que se construye. En este momento se *fijan* los elementos necesarios para continuar con dicha *reconstrucción*. Es necesario *institucionalizar* los elementos de dicha organización para sustentar su existencia y duración, ya que éstos nunca se imponen por sí mismos. Lo matemáticamente contingente se olvidará, mientras que lo matemáticamente necesario e institucionalizado tiene posibilidades de perdurar. En el marco de la teoría de situaciones didácticas, Brousseau (1990) puntualiza que es el *momento* en que la institución se impone al sujeto: la relación «personal» debe ceder el sitio a la relación «institucional».

Finalmente el *momento* de la evaluación corresponde a aquel aspecto de la actividad en que se pone a prueba el dominio que tiene un sujeto sobre la *organización matemática* construida. Es decir, se mide el estado en que se encuentra la relación personal del sujeto con la *obra matemática*. Así, esta *dimensión* puede ser vivida, de forma personal e íntima, cuando el estudiante decide averiguar cuánto sabe de lo que ha estudiado, o bien, de forma pública, cuando debe demostrar el dominio que posee de dicha organización al resto del grupo que estudia con él o a la institución encargada de organizar y dirigir el proceso de estudio, institución que está representada tradicionalmente por el profesor. Conjuntamente con esto, dentro de esta *dimensión* se puede poner a prueba o evaluar la potencia de las técnicas o, más generalmente, la capacidad de la *organización* en sí misma como *obra matemática*. En otras palabras, se pone a prueba la *relación institucional* con la organización matemática en tanto que condensación de ciertas *praxeologías matemáticas*. De esta forma, se pone de relieve la articulación que existe entre el *momento de la evaluación* y el de la *institucionalización*. Hay una dialéctica entre ambos, puesto que, por un lado, se evalúa lo que se ha hecho visible o institucionalizado y, por otro, se institucionaliza para, entre otras cosas poder evaluar.

Modelización de la actividad del profesor: noción de *praxeología didáctica espontánea*

Siguiendo el postulado esencial del enfoque antropológico que establece que toda actividad humana procede de una praxeología, es posible definir la figura del profesor y abordar la complejidad que envuelve su práctica profesional en estos mismos términos. Esto es, la actividad del profesor se puede describir como un conjunto de organizaciones praxeológicas que contemplan la realización de un sistema de tareas alrededor de las cuales se van a desarrollar y organizar un conjunto de técnicas, tecnología y teoría. Se trata, pues, de unos *tipos de problemas* «didácticos», *técnicas* «didácticas», *tecnología* y *teoría* «didáctica», aunque frecuentemente aparezcan implícitos o vagamente descritos dentro de dicha actividad. En este sentido, Brousseau ha considerado apropiado hablar en términos de la «epistemología espontánea del profesor» (Brousseau, 1998). La cuestión que da origen a la modelización por «separado» de las praxeologías matemáticas de las didácticas surge de la propia necesidad del análisis y no de la realidad misma que vamos a analizar.

Claro está que la complejidad que caracteriza las tareas didácticas del profesor tiene relación con el constante cambio que experimenta la sociedad. Esta última variable constituye el agente que determina, en gran medida, las distintas orientaciones que van a definir el proyecto educativo en el que el profesor participa.

En términos generales, Chevallard (1998) establece que dicho sistema de tareas se encuentra organizado en dos grandes «categorías» mutuamente dependientes, pero que abarcan distintos aspectos de la actividad del profesor. La primera contempla aquellas tareas relativas a la *concepción* y *organización* de los *dispositivos de estudio* y de *gestión* de sus respectivos *entornos*. La segunda está formada por las tareas de *ayuda al estudio* y, en particular, de *dirección de estudio* y *de enseñanza*. Cada una de estas categorías de tareas va a activar distintos tipos de técnicas didácticas para resolverlas.

Las funciones del profesor se conciben de manera progresiva. Cuando en una comunidad se decide estudiar una organización matemática, se recurre frecuentemente a alguna persona que está capacitada para ayudar a dicho estudio. Exento de mayores responsabilidades sobre el buen desarrollo y término del estudio, esta persona se sitúa en la posición de *ayudante provisional*. Si este ayudante decide tomar *parte* de responsabilidad en el proyecto de estudiar dichas organizaciones, entonces su función se convierte en la de *director de estudio*. Pero, si este director asume, además, la *responsabilidad de impartir un curso* o un conjunto de sesiones en las que presentará y «mostrará» –enseñará– los elementos de la organización que se quiere estudiar, entonces se convierte en un *enseñante*. Por consiguiente, el papel del profesor es, en primera instancia, el de un ayudante de estudio que asume el papel de *director*, para cuya tarea organiza e imparte un programa de *enseñanza*.

En correspondencia con las dos grandes categorías en que se organiza el sistema de tareas del profesor, una de las primeras cuestiones que encara el profesor, en cuanto enseñante, es la de reconstruir las organizaciones matemáticas escolares que aparecen propuestas en los programas oficiales y en los manuales para ser enseñadas. Esto es, contribuye a determinar el tipo de tareas matemáticas que va a contener dicha organización, así como también precisar hasta qué punto se van a desarrollar las técnicas que permiten realizarlas, y la tecnología y la teoría que las justifican.

El segundo gran tipo de tareas consiste en conducir la reconstrucción escolar de dicha organización matemática. Claro está que esta conducción puede ser realizada por el docente de diversas maneras, que a su vez pueden variar de un profesor a otro. No obstante, sea cual sea el proceder particular seguido, suponemos que aparecen algunos aspectos invariantes en cada una de estas distintas reconstrucciones.

Postulados fundamentales para el análisis didáctico del *proceso de estudio* y de la actividad del profesor

A modo de resumen, expondremos los principios que han orientado el análisis didáctico.

1) No es posible abordar un problema didáctico sin tomar en cuenta el conocimiento matemático –o la actividad matemática– involucrado en el mismo. Éste es un principio *epistemológico* muy potente para la didáctica de las matemáticas.

2) No es suficiente con tomar un modelo del conocimiento matemático elaborado desde una problemática ajena a la didáctica. Hace falta, además, un modelo construido por la propia didáctica de las matemáticas.

3) De acuerdo con el fenómeno de *transposición didáctica*, el uso del modelo anterior incluye el estudio de las *organizaciones matemáticas* que se tienen que estudiar en la escuela, de sus correspondientes *reconstrucciones*

escolares y el establecimiento de la distancia existente entre ambas.

4) No se debe olvidar el carácter *institucional* de la problemática didáctica. El profesor realiza su actividad en el seno de una institución que posee sus propios mecanismos para controlar su funcionamiento: el profesor no actúa –ni puede actuar– en soledad. Por el contrario, se encuentra sujeto a fuertes restricciones institucionales que van a influir decisivamente en su actividad profesional –y en la de los alumnos.

5) Se deben considerar los dos grandes tipos de tareas que éste realiza; las relativas a la *organización* y *gestión* de los *dispositivos de estudio* y las relacionadas con la tarea de *dirección* del estudio y *de enseñanza* en el sentido anteriormente expuesto.

Estas cuestiones señalan que, para estudiar el «pensamiento del profesor», hay que atender a *toda su actividad* de *ayuda para el estudio*. El pensamiento del profesor debería recubrir, tanto la manera como éste reconstruye la *organización matemática* que debe enseñar como su manera de organizar y dirigir el estudio, pasando por las explicaciones y justificaciones que es capaz de elaborar sobre su práctica y la de sus alumnos. Se pasa así de la problemática de los componentes del «pensamiento» a la de los instrumentos para la «dirección del proceso de estudio». Lo que el profesor «piensa», sus creencias e ideas sobre las *obras* que ha de enseñar y sobre su enseñanza-aprendizaje pueden afectar el desarrollo de su práctica docente, pero para mostrarlo es necesario ser capaces de describir en qué consiste esta práctica.

PROPÓSITO Y METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

El propósito de investigación

Situados dentro del enfoque antropológico, podemos formular nuestro propósito general de investigación en los siguientes términos:

Lo que nos interesa estudiar, en general, son las *técnicas didácticas* que utiliza el profesor para dirigir y gestionar el *proceso de estudio* de los «límites de funciones» en la enseñanza secundaria y el tipo de *reconstrucción* que realiza de la *organización matemática* propuesta por los cuestionarios oficiales de esta institución escolar. Al lado de las técnicas didácticas, también habrá que situar las *tecnologías* o elementos *tecnológicos* que permiten al profesor (y a su entorno) describir, justificar y, más en general, «pensar» y dirigir su práctica docente. Nuestro trabajo se sitúa, pues, dentro del proyecto, mucho más amplio, de descripción y estudio de la *praxeología didáctica,* en general, y de la del profesor, en particular.

Pese a que se han realizado algunos estudios sobre la práctica del profesor en didáctica de las matemáticas (Margolinas, 1994), ésta es una de las problemáticas de investigación que continúa abierta. Así, se han podido describir las técnicas que utiliza el profesor en términos generales de «estrategias» metodológicas o «estilos» docentes pero el aspecto específico del contenido matemático que las determina y el punto de vista del enfoque *antropológico* de las mismas aún no han sido suficientemente tratados. Dado lo reciente de este último enfoque, nos encontramos con la necesidad de elaborar *herramientas de análisis inexistentes*, por lo menos de manera explícita, para realizar dicha empresa. De aquí que nuestra mayor contribución consiste –más allá de aportar resultados concretos sobre el funcionamiento, y disfuncionamientos, del *sistema didáctico*, del desarrollo del *proceso de estudio* de los límites de funciones y algunas descripciones de la *praxeología didáctica* del profesor– en presentar una metodología de análisis útil y potente para realizar un estudio del *proceso didáctico*.

Para dar sentido a este programa de investigación es necesario poner de relieve, como cuestión básica, la existencia de una epistemología «espontánea» del profesor de matemáticas. Es decir, elementos de una actividad «natural» que se desarrolla y que interviene en el ejercicio docente, ya sea implícita o explícitamente. Uno de los supuestos básicos de la didáctica consiste en creer que se puede describir lo que hace de manera natural el profesor (Brousseau, 1998). Esto es, *describir aquellos gestos y estrategias que el profesor realiza de manera totalmente espontánea y natural, como si no necesitara para ello ningún tipo de conocimiento elaborado.*

Es importante señalar aquí que el proceso de estudio *no empieza ni termina en el aula*. El profesor ha iniciado su función de *ayuda al estudio* antes de que las clases empiecen. De igual forma, una vez comenzado el proceso de estudio, éste continuará en casa del estudiante. Nosotros nos centramos en el análisis del proceso didáctico realizado dentro del aula. No obstante, tenemos acceso a parte de dicho proceso vivido fuera del aula al realizar algunas entrevistas a los profesores considerados.

Metodología de investigación

La secuencia de pasos que hemos seguido para el logro de nuestro propósito de investigación es la siguiente:

Análisis de los libros de texto: antecedentes para la investigación

El interés primero de nuestro trabajo fue motivado en gran parte por los resultados obtenidos en la tesis de maestría (Espinoza, 1994; Espinoza y Azcárate, 1995) previamente realizada sobre la enseñanza del concepto de *límite* en secundaria. Se trataba de un estudio experimental en el cual comenzamos a introducir los elementos teóricos del enfoque antropológico que por entonces conocíamos. De ahí que el análisis de la organización matemática en torno a los límites de funciones realizado en dicho trabajo fuera ampliamente mejorado en nuestra presente investigación. Para efectuarlo, analizamos primero los programas oficiales en torno a este concepto por entonces vigente. Posteriormente, escogimos una muestra de cuatro libros de texto de prestigiosas editoriales y analizamos las distintas reconstrucciones que proponían de esta organización matemática para ser realizada en el aula.

Búsqueda y recogida de la información

Para realizar la investigación, partimos considerando un profesor (A) de matemáticas de 2º de BUP que aceptó nuestras condiciones: ser grabado, entrevistado, recoger su material de clase, etc.; y todo ello sin que le explicáramos los objetivos del estudio. Se hizo un seguimiento completo de la secuencia didáctica desde que comenzó con la unidad de límites de funciones hasta las aplicaciones del límite en el estudio de funciones continuas, grabando todas las sesiones de clase en vídeo. La información recogida es muy rica y nos permitirá obtener resultados contundentes. Consta de:

a) cintas de vídeo de todas las sesiones de clase;

b) observaciones de campo de cada clase;

c) entrevista grabada en casete del profesor antes de empezar el tema;

d) dispositivo didáctico utilizado por el profesor.

La entrevista se construye por medio del refinamiento de la entrevista realizada previamente en la tesis de maestría y atendiendo a las funciones principales que el profesor desempeña como director de estudio. Dicha entrevista fue realizada al profesor después de terminar el proceso de estudio relativo a los límites de funciones.

Recogida de material de los alumnos

Con el fin de realizar el análisis de la *enseñanza* de los límites de funciones inscrito dentro del marco más amplio del *proceso de estudio* que la engloba, y dado que dicho *proceso* es, pues, un proyecto común entre profesor y alumnos, para llevar a cabo el estudio, es necesario, además, tomar en cuenta la actividad que realizan los alumnos para estudiar dicha *obra* escolar organizada y dirigida por el profesor. Claro está que esta actividad no se reduce sólo a la realizada en el aula, sino que continúa fuera de ésta, en la casa de cada uno de los estudiantes. De esta forma, una manera que nos permitió no restringirnos demasiado al aula fue la de considerar alguno de los materiales utilizados por los alumnos en sus respectivos estudios. Dicho material es el siguiente:

a) apuntes de clase de los alumnos;

b) exámenes sobre el tema de límites de funciones;

c) respuestas al cuestionario elaborado por el investigador.

El cuestionario pretendió recoger el tipo de actividad que eran capaces de hacer, efectivamente, los alumnos con los límites de funciones, y el tipo de argumentaciones que utilizaban para dicha actividad.

Repetición de la observación

Una vez realizada la observación del primer profesor, estimamos necesario repetir la experiencia para luego poder contrastar las observaciones. De hecho, para poder detectar lo *invariante* y lo *variable* en las *técnicas didácticas* que utiliza un profesor en su tarea de organización y conducción del proceso de estudio, es necesario poder contrastar su actuación didáctica específica con la de algún otro profesor. Ahora bien, primero es necesario ser capaces de describir lo que hace un profesor durante todo un *proceso de estudio*, más que observar episodios aislados de procesos de estudios segmentados provenientes de distintas aulas: para entender mejor la «diferencia específica» entre las técnicas didácticas que utilizan distintos profesores en aulas diferentes, es importante conocer antes, aunque sea «en potencia», el «género próximo» en el que se inscriben dichas técnicas.

De esta forma observamos un segundo profesor (B) de 2º de BUP mientras realizaba el mismo proceso de estudio. La información es equivalente a la del primer profesor.

El instrumento metodológico para la investigación: criterios de construcción y posibles utilizaciones

Para recoger la información que nos permite realizar el análisis del proceso de estudio vivido en el aula, hemos construido dos tipos de tablas diferentes. En la primera, designada por nosotros *tabla tipo I*, hemos realizado la transcripción del proceso de estudio observado, utilizando los criterios generales que se exponen a continuación.

Tabla I

Episodio	Momento didáctico	Actor principal	Objetos matemáticos presentes	Actividades de estudio

Un *episodio* representa una primera descomposición intuitiva del proceso de estudio que se relaciona con un cambio significativo en la acción que se realiza y cuyas reglas de formación aún son inciertas. El momento dominante del estudio aparece aquí de forma únicamente indicativa con la finalidad de podernos situar dentro del proceso de estudio y leer su desarrollo compacto en la tabla. El *actor principal* es aquella persona que, aun existiendo interacciones, tiene la mayor responsabilidad sobre el desarrollo de la tarea matemática concreta que se realiza. Los *objetos matemáticos presentes* son aquéllos que aparecieron explícitamente en el discurso del profesor o alumno en la clase. Las *actividades de estudio* corresponden a la transcripción de los diálogos y actividades sucedidas en el aula. Con esta tabla podremos proponer una primera secuenciación organizada por episodios y momentos vividos en cada clase. Además, es posible analizar y describir los componentes esenciales de la organización matemática construida.

Tabla II

Clase	Tipos de problema	Técnicas matemáticas	Elementos tecnológicos y teóricos	Momento dominante y submomento	Elementos de técnicas didácticas locales

La segunda, designada *tabla tipo II*, nos permite realizar el análisis más profundo del proceso de estudio descrito globalmente a partir de la tabla tipo I.

No partimos de un modelo teórico a priori detallado de *organización matemática* en torno a la noción de *límite* ni de un proceso de estudio «ideal» de esta organización. Lo que hacemos es describir el proceso de estudio tal y como (creemos) lo vivieron sus protagonistas: la agrupación de problemas en *tipos de problemas* es la que realiza el profesor (de manera más o menos explícita); las distinciones entre las distintas *técnicas* son también las que se establecen a lo largo del proceso; los elementos *tecnológicos* y *teóricos* que se presentan en las tablas son aquéllos que aparecieron explícitamente en clase; etc. Esto no quiere decir que la organización presentada no hubiera podido ser otra (otros problemas u otra tipología, otras técnicas, etc.). Las tablas sólo pretenden reflejar con la mayor fidelidad posible la *organización matemática* que se construyó efectivamente durante el proceso de estudio, así como la estructura de este proceso en sus distintos *momentos* tal como fueron observados empíricamente.

La estrategia de análisis didáctico-matemático

El plan seguido para realizar el análisis consistió en los siguientes pasos:

1) Exploración de algunas organizaciones matemáticas construidas en torno al «límite» a lo largo de la historia de las matemáticas.

2) Análisis de las reconstrucciones propuestas en los programas oficiales sobre los límites de funciones.

3) Análisis de la *dimensión estática* del proceso de estudio «virtual»: los libros de texto.

4) Análisis de la *dimensión dinámica* del proceso: las grabaciones, dispositivos didácticos y observaciones de campo.

5) Análisis de las técnicas didácticas utilizadas por los profesores observados para dirigir el proceso de estudio. Nuestra descripción no pretende abarcar la praxeología completa del profesor sino que su actuación en la sala de clase.

6) Análisis de la tecnología didáctica de los profesores: las entrevistas.

7) Síntesis, relación de resultados y conclusiones del estudio.

PRINCIPALES RESULTADOS DEL TRABAJO

A continuación sólo describiremos algunos de los principales resultados obtenidos en nuestro trabajo de investigación. La totalidad de los resultados, así como también la mayor especificación de los mismos, se pueden encontrar en el trabajo de tesis doctoral (Espinoza, 1998).

En cuanto a la organización matemática escolar en torno al objeto «límite de función»

A partir del análisis de los programas españoles oficiales y de los libros de texto hemos obtenido los resultados que se exponen a continuación.

El fenómeno didáctico fundamental

Encontramos que en esta institución de enseñanza no existe una única organización matemática –en torno al límite de función–, propuesta para ser estudiada en el aula, sino que hay dos organizaciones matemáticas incompletas. Además, no sólo son distintas sino que aparecen totalmente desconectadas entre sí.

La primera, que hemos denominado *organización matemática relativa al álgebra de límites*, responde a la única cuestión del cálculo del límite de función partiendo del supuesto previo de su existencia. El modelo matemático implícito de dicho concepto es, en este caso, el de un operador algebraico que cumple con una determinada axiomática del álgebra de límites, por lo que el *nivel práctico* de esta organización es de naturaleza esencialmente algebraica. Además, el *objeto* «límite de función» no es cuestionado ni descrito en tanto que objeto pero tampoco funciona como instrumento. Los tipos de problemas y las técnicas para el estudio esconden la problematicidad utilizada a fin de introducir esta organización, sobre todo aquéllos que son resueltos mediante un uso algebrizado del infinito. Los tipos de problemas gráficos y el estudio de la continuidad de funciones aparecen como un apéndice de la organización, a modo de aplicación de las técnicas algebraicas. El mayor disfuncionamiento de esta primera organización escolar es que no contiene un entorno tecnológico y teórico suficientemente explícito para el nivel práctico de la misma. Postulamos que esta restricción se traducirá en serias dificultades a la hora de realizar su correspondiente reconstrucción en la sala de clases. No obstante, ésta es la organización matemática que el alumno deberá estudiar concretamente, puesto que todas las actividades propuestas en los manuales para el alumno se inscriben dentro de la misma. Es por ello que también nos hemos referido a esta organización como a la *praxis* de la organización matemática que se debe construir en el aula.

La segunda, que hemos designado *organización matemática relativa a la definición del objeto límite de función* o *sabia*, obedece a la cuestión de la existencia del límite. El modelo matemático más o menos explícito del límite, en este caso, es el típicamente utilizado dentro del trabajo del análisis, ya sea en términos de ε y δ utilizados en los espacios métricos o bien de entornos, vecindades y sucesiones de los espacios topológicos. La mayor insuficiencia de esta organización es que no aparece el *nivel práctico* de la misma que permitiría instrumentalizar el nivel tecnológico y teórico antepuesto. Así, esta restricción ecológica hace que esta organización matemática termine por desaparecer de los manuales. Sin embargo, ésta aparece como el discurso tecnológico que pretende justificar la práctica algebraica propuesta por lo que la hemos denominado como el *logos* de la organización matemática que se construirá en el aula.

El divorcio detectado entre estas dos organizaciones, o bien entre praxis y logos, nos permitió postular *algunos fenómenos didácticos previsibles* sobre la enseñanza de la noción de *límite de función* en esta institución que, posteriormente, hemos visto corroborados con los hechos. La insuficiencia de la primera organización induce a que la práctica se reduzca a una actividad únicamente formal y atomizada: los problemas aparecen aislados, las técnicas para resolverlos se utilizan de manera rígida y limitada siendo en sí mismas el objetivo del estudio. Del mismo modo, las incoherencias de la segunda organización provocan que, o bien aparezca como un artefacto decorativo, o bien sea implícitamente tratada o, incluso, no sea estudiada. Al reconstruir el nivel práctico de la organización matemática sin una tecnología y teoría apropiada que la explique y justifique, la actividad matemática que se realiza resulta arbitraria y formal.

Postulamos que este fenómeno didáctico puede encontrar su explicación en las restricciones impuestas por la *transposición didáctica* y la necesidad de negociar las *obras* matemáticas escogidas para ser enseñadas. En efecto, para ser legitimadas por parte de la institución sabia, las *reconstrucciones escolares* han de satisfacer en primera instancia los imperativos de rigor y formalización propios de dicha institución. Pero, para poder existir como un tipo de tareas matemáticas efectivamente realizables, debe también ser viable y satisfacer los imperativos de comprensión y sentido propios de la institución de enseñanza. Lo que resulta de este proceso de negociación, en este caso, son unas imitaciones empobrecidas de las organizaciones matemáticas «sabias» en oposición a nuevas reconstrucciones aunque sean restringidas pero coherentes.

En cuanto al proceso de estudio de la organización matemática vivido en el aula

El instrumento de análisis

Con el instrumento de investigación que elaboramos, conseguimos observar y analizar dos procesos de estudio en torno a la noción de *límite de función*. Logramos: *a)* identificar los distintos ingredientes de las organizaciones matemáticas efectivamente construidas en ambas aulas; *b)* describir de forma detallada la gestión y organización de cada *momento didáctico* vivido relativo a las distintas organizaciones matemáticas puntuales construidas (un tipo de problemas con sus respectivas técnicas, elementos tecnológicos y teóricos) y que componen la organización matemática más amplia; *c)* sintetizar lo que hemos llamado las *estrategias didácticas globales* de cada profesor para dirigir dichos procesos; *d)* identificar y describir algunos elementos de *técnicas didácticas* específicas utilizadas por los profesores para resolver sus sistemas de tareas didácticos obteniendo así la materia prima para realizar el análisis más específico de las *praxeologías didácticas espontáneas* de los profesores; y, finalmente, *e)* poner de manifiesto *fenómenos didácticos* relacionados con la gestión del proceso didáctico en el aula.

De esta manera, conseguimos mostrar la potencia y funcionalidad de este instrumento metodológico al permitir la observación, estructuración y posterior análisis de los procesos de estudio empíricos tal como se desarrollan en el aula.

Caracterización de los dos procesos de estudio

Las organizaciones matemáticas construidas

Tal como señalamos antes, pese a tratarse de profesores distintos y de aulas diferentes, pudimos constatar que las organizaciones matemáticas en torno a los límites de funciones efectivamente construidas poseen en esencia las mismas características. Ambas obedecen a la única cuestión del *cálculo de límites* de funciones, partiendo de la base que éste existe o es infinito (o, como mínimo, de que existen o son infinitos los límites laterales). Se asume que el límite de una función en un punto es algo calculable (aunque pueda valer infinito) y el problema radica en realizar dicho cálculo. El campo de funciones con el que se trabaja es también restringido: las funciones son únicamente racionales o irracionales simples y vienen dadas por su expresión algebraica o por su representación gráfica. Partiendo de este tipo nuclear de problemas, se extiende la organización hacia el estudio de la continuidad de una función en un punto, problema que puede también presentarse como la cuestión originaria de la organización, pero que sólo aparece para practicar las técnicas de cálculo y no como un problema que se tenga que estudiar en sí mismo.

Las técnicas matemáticas que se utilizan consisten en un conjunto de manipulaciones algebraicas: operar polinomios, aplicar el método de Ruffini, etc. En el caso del profesor A, en el comienzo del estudio apareció la técnica de cálculo del límite por aproximaciones sucesivas mediante la construcción de una tabla de valores. No obstante, esta técnica fue simplemente utilizada para introducir el tipo de problemas «central» sobre el cálculo de límites, puesto que más adelante cambió claramente de estatuto: pasó de ser una técnica de cálculo a ser un elemento tecnológico-teórico importante utilizado por el profesor para justificar las nuevas técnicas que introducía. De esta manera, pese a ser una noción implícita dentro de ambos procesos de estudios, especialmente en el dirigido por el profesor A, la idea de «aproximación infinita» a un punto, o al infinito, no se hizo efectivamente operativa. Este hecho da cuenta de la visión estática con que se presenta y estudia el objeto *límite de función* en esta institución, en que lo único que lo caracteriza son las manipulaciones algebraicas que hay que realizar para obtenerlo.

La mayor dificultad a la cual se vieron enfrentados ambos profesores fue la de escoger los elementos tecnológicos adecuados para el tipo de actividad que proponían a la clase, cuestión que nos recuerda las restricciones que detectamos al analizar los programas y manuales y nos permite confirmar ampliamente nuestras previsiones. Es en este nivel tecnológico donde existieron mayores divergencias entre ambos procesos de estudio y que detallaremos más adelante cuando describamos las diferencias puntuales entre las estrategias de ambos. Diremos sólo que, mientras el profesor A intentó explicar y justificar las manipulaciones que se realizaban en el estudio desde un punto de vista del análisis o cálculo infinitesimal, el profesor B dejó sin abordar casi la totalidad de las necesidades tecnológicas que iban surgiendo de la práctica. No obstante el gesto notable del profesor A, el tipo de tecnología a la cual recurría aparecía en franca contradicción con la práctica que se realizaba, cuestión que terminó por provocar la reducción de la tecnología preliminar a otra casi totalmente algebraica.

En síntesis, pudimos comprobar de forma muy clara que las reconstrucciones realizadas por los profesores son esencialmente dos versiones de una misma organización matemática. El «género próximo» en el cual se inscriben dichas reconstrucciones tiene estricta concordancia con la propuesta por los programas oficiales y los manuales que hemos analizado anteriormente. Éste podría ser un claro ejemplo de la gran influencia que ejercen las restricciones institucionales impuestas por el sistema de enseñanza secundaria a la hora de realizar su estudio efectivo en el aula.

Las estrategias globales

El análisis más detallado de cada reconstrucción, esto es, el tipo de organización y gestión de los momentos didácticos del estudio que realizó cada profesor, nos permitió identificar las «diferencias específicas» entre las estrategias didácticas globales utilizadas por éstos en función de la importancia otorgada a los distintos momentos del estudio.

Semejanzas

En lo que se refiere a los elementos comunes, señalemos en primer lugar que ninguno de los dos profesores describe explícitamente la organización matemática en su conjunto, ni al principio del proceso (a modo de presentación general) ni al final (a modo de síntesis del trabajo realizado). De acuerdo con la ausencia de componentes tecnológicos explícitos de la organización, tampoco hacen vivir, exceptuando casos aislados, los momentos tecnológico-teóricos que requerirían el estudio de los distintos tipos de problemas. De ahí la falta de articulación entre ellos, la poca explicitación de los elementos de la organización (recordemos que los ingredientes tecnológicos permiten, no sólo justificar, sino también *describir* las técnicas) y la ausencia, en cierto sentido correlativa, del trabajo de la técnica (ésta no puede desarrollarse mucho sin que surjan, inevitablemente, nuevas cuestiones y nuevos problemas).

Contraste

El profesor A intentó organizar y dirigir un proceso de estudio proponiendo un problema inicial (y una razón de ser) para dar lugar a la organización matemática en construcción y presentar, a partir de ahí, los tipos de problemas de forma progresiva, extendiendo las técnicas de estudio iniciales para construir nuevas técnicas y poder seguir con el estudio. Esta reconstrucción, que partía considerando el objeto *límite de función* como útil para estudiar un tipo de problemas de *aproximación infinita* entre puntos de R o curvas de R^2 propio del análisis, resultó inviable en esta institución didáctica particular. En efecto, la tecnología a la cual recurría el profesor aludía implícita e incluso explícitamente a los números reales (o, cuanto menos, a las curvas de R^2) y suponía el conocimiento y manejo de ciertas propiedades de su estructura. Así, la mayor dificultad con la cual se vio enfrentado este profesor se suscitó desde el punto de vista tecnológico: su reconstrucción inicial se inscribía dentro del campo del análisis, mientras que la organización que efectivamente debía construir se inscribía dentro del marco del trabajo algebraico elemental. De esta forma, las contradicciones iniciales entre praxis y logos en la clase de A eran insalvables.

La estrategia utilizada por el profesor para proseguir con el proceso didáctico consistió en «vaciar» la organización matemática inicialmente prevista en lugar de reconstruirla desde otro punto de vista, quedando de esta manera una organización que no responde propiamente ni a una cuestión del análisis ni simplemente al cálculo algebraico de los límites. De aquí que se produjeran constantes contradicciones entre la práctica efectiva y el discurso utilizado para explicarla y justificarla.

Este profesor organiza el momento exploratorio como la dimensión dominante del estudio y así intenta evitar dichas contradicciones. La estrategia consiste en explorar constantemente situaciones distintas de forma muy acelerada, pero presentadas como si fueran parte de una misma cuestión. Esta manera de proceder hace avanzar el tiempo didáctico de manera muy rápida sin que aparezcan cambios bruscos de actividad, evitando tener que dar una nueva tecnología e institucionalizar los nuevos elementos utilizados. Conjuntamente con ello, la institucionalización es débil (sólo se institucionalizan ciertos elementos de las técnicas y no los tipos de problemas), no queda claro qué elementos pertenecen a la organización y cuáles no, ni tampoco una visión global del proceso didáctico. Esta situación produce algunas rupturas de contrato en el examen final cuando es evaluado el dominio de ciertos aspectos generales de los tipos de problemas que no han aparecido oficializados e, incluso un tipo de problemas nuevo.

Debido a ello, hemos definido la estrategia del profesor A como la del eterno «momento exploratorio», en la que el proceso de estudio se va haciendo sobre la marcha, y que se corresponde claramente con la tendencia «modernista» hoy en boga en la esfera de la enseñanza preuniversitaria. En concordancia con esta estrategia, el «topos» del alumno aparece dentro de la clase con la única tarea de seguir la exploración de los tipos de problemas que el profesor va presentando. Al profesor corresponde además la tarea de demandar explicaciones a los alumnos (sin que éstos puedan generalmente contestar) cuando las técnicas y sus utilizaciones no son claras o cuando entran en contradicción con alguna anteriormente utilizada. De esta forma, el «topos» del profesor aparece como el dominante dentro del proceso de estudio.

En contraposición a la estrategia del profesor A, el profesor B organiza y gestiona un proceso de estudio mucho menos ambicioso. Su estrategia consiste en construir la organización matemática en torno a los límites de funciones a partir de los límites de sucesiones previamente estudiados. Recurre a esta organización antigua y la adapta o «redefine» para abordar unos tipos de problemas similares. Se trata de una estrategia típicamente utilizada dentro del momento de la institucionalización que pretende economizar grandes esfuerzos en términos de tiempo y de «trabajo». Esta gestión de la dialéctica antiguo / nuevo le permite fijar los elementos de la nueva organización a partir de los ya establecidos, adaptando las técnicas de estudio y evitando la explicitación de la tecnología y teoría necesarias.

De esta manera, el profesor no gestiona un verdadero proceso de estudio, puesto que todo parece que fuera conocido previamente y dominado por la clase. Por un lado, los límites de funciones aparecen como poco importantes porque los tipos de problemas son en su mayoría resolubles con las técnicas antiguas de cálculo de límites de sucesiones. Por otro lado, las técnicas gráficas para resolver los tipos de problemas sobre gráficos de funciones aparecen como evidentes y naturales. Dado que las técnicas están implícitas en el trabajo –no es necesario explicitarlas bajo el supuesto que son conocidas por la clase–, la tecnología está ausente. Sólo en algunos casos aparece pero se mantiene en el ámbito de lo «visual», gráfico, evidente.

Hemos denominado por ello la estrategia didáctica general utilizada por el profesor B como la del «eterno momento de la institucionalización». El profesor, más que dirigir un proceso de estudio cuyos actores serían los alumnos, se limita a una «narración» del mismo. Utiliza un discurso totalmente personificado en el que «dramatiza» los objetos de la actividad. En concordancia con esta estrategia, el «topos» del alumno aparece fuera de la clase, mientras que el «topos» del profesor ocupa todo el espacio dentro de la misma. Esta situación comporta un vaciado de los componentes de la organización, así como cierta tendencia al «tecnicismo» para conseguir que los alumnos puedan realizar una mínima actividad (aunque sólo sea el día del examen).

Otros resultados

Nuestro análisis nos permitió corroborar algunos *fenómenos matemáticos locales* relativos al estudio realizado en el aula que se podían desprender del análisis de la organización matemática: contradicción entre la tecnología sabia y la práctica de cálculo de límites, con sus consecuencias concretas en la gestión del proceso de estudio; los efectos en la gestión del proceso didáctico de la ausencia de una tecnología para el álgebra de límites; la naturalización de las técnicas gráficas para el estudio de funciones que parte siempre de funciones continuas en su dominio; etc.

Se observa claramente aquí la fuerza de las *restricciones institucionales* sobre el tipo de organización matemática reconstruida en el aula y sobre las elecciones personales de los actores de dicha reconstrucción: dos profesores distintos, con estrategias didácticas aparentemente dispares, construyen organizaciones matemáticas en muchos aspectos equivalentes y con las mismas características que la organización oficial.

Nuestra descripción del proceso de estudio *por momentos* ha puesto de manifiesto, además, *la necesidad de analizar el proceso de estudio en su globalidad*, y no en episodios puntuales, dado que el análisis fragmentado produce inevitablemente resultados parciales, perdiendo todo el contraste de lo que realmente ha sucedido en el aula. Si consideramos la organización matemática construida globalmente, parece que las técnicas didácticas utilizadas por el profesor sean siempre en términos generales las mismas (dada su pobreza), pero, en cambio, si descendemos hasta el detalle de la organización matemática puntual (considerando uno a uno los tipos de problemas), entonces nos aparecen como significativamente diferentes.

En cuanto a la praxeología didáctica del profesor

Detrás de las «maneras de hacer» generales de los dos profesores, se esconden, según el postulado fundamental del enfoque antropológico, praxeologías didácticas particulares que se concretan en unos sistemas de tareas específicos, unos conjuntos más o menos integrados de técnicas didácticas, así como de maneras de entender, describir y justificar las prácticas que éstas permiten realizar. Las organizaciones praxeológicas didácticas que describimos son praxeologías *espontáneas*, es decir no reflexionadas ni elaboradas dentro de un ámbito de saber específico: son praxeologías «en acto», vividas por sus actores pero raramente explicitadas y cuya naturalización nos impide muchas veces percibir los grados de libertad y las restricciones bajo las cuales el profesor actúa.

A continuación, detallamos algunos de los elementos de la praxeología didáctica que hemos podido encontrar.

El nivel práctico

A partir del material empírico recogido, del análisis previo de la organización matemática objeto de estudio y de la estructuración del proceso didáctico según los distintos momentos del estudio, propusimos una *primera descripción de las tareas didácticas que realiza el profesor en su función de director del proceso de estudio.* Una vez establecidos los grandes tipos de tareas, y partiendo siempre de la observación de su realización concreta en el aula, pudimos destacar las principales *técnicas didácticas* utilizadas por el profesor.

Nos centramos exclusivamente en aquellas tareas y en aquellos gestos que el profesor realiza en el aula con sus alumnos. Escogemos como punto de referencia el tipo de tareas que consiste en gestionar los distintos momentos del proceso de estudio de la organización matemática en torno a los límites de funciones y, a partir de éste, identificamos como subtipos de tareas las referidas a: *a)* la gestión de una organización matemática puntual; *b)* la elección del material matemático que se utilizará para gestionar dicho momento; *c)* la articulación de dichas organizaciones puntuales; y *d)* la creación de un topos para el alumno dentro del mismo. A partir de este sistema de tareas describimos algunas técnicas didácticas que permiten al profesor realizar dichas tareas.

Se observa una uniformidad técnica en la dirección del estudio llevada a cabo por ambos profesores, junto con una pobreza de dispositivos didácticos para gestionar los distintos momentos del estudio, basadas casi exclusivamente en un discurso en la pizarra. Estas limitaciones vienen fuertemente influenciadas por la institución didáctica escolar a que pertenecen, la cual suele imponer una praxeología didáctica fundamentalmente monotécnica: examen escrito, lección dictada, etc.

El nivel tecnológico y teórico

Tal como anunciamos antes, la *descripción de los componentes tecnológicos y teóricos de la praxeología del profesor*, cuya función principal es la de proponer un marco descriptivo y justificador de la práctica docente, ha sido abordada mediante entrevistas a los profesores sobre la preparación y planificación del proceso didáctico, las técnicas de dirección y gestión del proceso en el aula y cuestiones generales acerca de la organización matemática estudiada. No describimos dos organizaciones didácticas posibles, sino que señalamos algunos elementos descriptivos y justificativos que los propios actores explicitaron.

Postulamos *dos niveles de argumentación* en los que situar, en primera instancia, las tecnologías espontáneas del profesor. En primer lugar, el *nivel de elaboración personal*, basado en la experiencia; en segundo lugar, *el nivel institucional*, que se fundamenta en elaboraciones exógenas a su propio quehacer. En ambos casos, las elaboraciones tecnológicas espontáneas contemplan tres aspectos del proceso didáctico: las características de la organización matemática objeto de estudio, la praxeología didáctica del alumno y los dispositivos pedagógicos al uso que proporcionan un sostén genérico a las técnicas docentes más habituales. En todos los casos, la tecnología espontánea aparece poco elaborada, poco sistemática e incluso, en ciertos aspectos, contradictoria. Pero no por ello deja de conformarse a la práctica efectiva de los profesores, explicando algunos aspectos de su estrategia didáctica global.

El enfoque tecnológico personal aparece, de hecho, cuando existe un pequeño margen de libertad en el modo de reconstruir la organización matemática considerada, sobre todo a la hora de decidir el «orden» de exposición, o el «material» para el momento del primer encuentro, o el tipo de evaluación.

Desde el punto de vista institucional aparece apoyado en ciertos *modelos exógenos* de naturaleza variada –y muy dispersa (matemática, pedagógica, psicológica, cultural, etc.)– y que el profesor retoma por cuenta propia. Así, dentro de este segundo nivel podemos distinguir tres grandes categorías de argumentaciones. El primero de éstos proviene de la cultura didáctica tradicional y consiste en un *modelo interpretativo, más o menos implícito, de la naturaleza del conocimiento matemático y sus condiciones de reconstrucción.* Podríamos caracterizar este tipo de discurso como la componente epistemológica de la tecnología didáctica. Se traduce en un discurso justificativo basado en una determinada inmovilidad de la organización matemática estudiada, un determinismo casi absoluto que parece dejar al profesor poco margen de maniobra. Ante tal determinismo teórico, no cabe ningún tipo de justificación. De ahí la naturalización de este componente matemático de la tecnología didáctica. La segunda gama de discursos institucionales encuentra sus orígenes en la psicología del aprendizaje, tal como ésta es adaptada, e incluso adulterada, por la cultura pedagógica. Pero no debemos limitarla a este componente psicológico, sino que se refiere, más en general, a todo aquello que tenga que ver con las *praxeologías espontáneas de los alumnos*. Se trata de un nuevo determinismo que es vivido de manera «natural» e incuestionable por los profesores: cómo aprenden los estudiantes, dónde radican sus principales dificultades, cómo entienden las cosas, qué no pueden entender, qué anotan en sus cuadernos, a qué atribuyen mayor importancia, etc. Como en los demás casos, la interrogación teórica en este enfoque (¿por qué no lo entienden?, ¿por qué no lo anotan?, ¿por qué no lo consideran importante? etc.) permanece casi siempre ausente. Finalmente, aparecen argumentos que provienen, a nuestro entender, de discursos tecnológicos culturales más compartidos en la institución didáctica, que podríamos situar en el *enfoque pedagógico* (en oposición al didáctico-matemático) y que afectarán casi específicamente a la posición del profesor. Nos referimos aquí a los tipos de argumentos «casi de autoridad», impuestos por la tradición o las modas pedagógicas, que hemos vislumbrado a través del tema del libro de texto («yo soy antilibro»), de la evaluación («intento que no sean problemas absolutos»), del teoricismo (el «sentido» no está en los problemas), de la importancia atribuida a un momento en detrimento de otros, etc.

Esta última etapa de la investigación pone de manifiesto la imperiosa necesidad de abordar un campo de problemas didácticos que hasta el presente ni siquiera estaba definido y que nuestro trabajo presente ya nos permite plantear. Son problemas de carácter metodológico cuyo principal interés es el de suscitar claras necesidades teóricas. Creemos que detrás de estas cuestiones existe un problema de fondo que no podemos eludir: si de lo que se trata es de elaborar descripciones de una *tecnología práctica*, y si no queremos caer en el empirismo más ingenuo, entonces no basta con el estudio de casos y con descripciones más o menos «naturalistas». Se necesitan modelos teóricos de posibles *tecnologías didácticas* o, más en general, de posibles praxeologías didácticas.

CONCLUSIÓN

El recorrido que realizamos por distintos paradigmas de investigación en didáctica de las matemáticas y que describimos al inicio del artículo nos permitió formular un problema de investigación oportuno y, además, poner en evidencia la pertinencia del enfoque antropológico como marco teórico integrador para llevarlo adelante. Así, partiendo de un modelo epistemológico general del conocimiento matemático, pudimos reformular la problemática del «pensamiento del profesor» en términos de la descripción de la actividad del profesor como director de un proceso de estudio.

Pudimos mostrar hasta qué punto el análisis de los elementos tecnológicos que condicionan la práctica del profesor, entre los que cabría incluir los discursos habitualmente considerados como formando parte de su «pensamiento», requieren una descripción previa de dicha práctica y un estudio de su espacio de posibilidades. A partir del postulado fundamental de que toda actuación de una persona en una institución procede de una *praxeología*, hemos dado prioridad al estudio de los componentes de la praxeología didáctica del profesor que incluye tanto el «hacer» del profesor como su «saber-hacer».

Asimismo, hemos mostrado la necesidad de abordar una investigación como la que presentamos desde una perspectiva más amplia o general que la del aula. En efecto, el profesor no actúa –ni puede actuar– en soledad. Es miembro de un colectivo que vive y se desarrolla bajo ciertas reglas de funcionamiento. En particular, los contenidos matemáticos que deben ser estudiados en la escuela vienen delimitados y caracterizados de antemano por la institución, la que de algún modo se impone al profesor. Por tanto, habría que evaluar las posibilidades didácticas reales que tiene el profesor para reconstruir dichos contenidos escolares. Más generalmente, es necesario considerar y estimar el peso que supone para el desarrollo de la práctica docente las restricciones institucionales bajo las cuales actúan los profesores.

Finalmente, nuestro trabajo ha contribuido al desarrollo del enfoque antropológico de lo didáctico mostrando la funcionalidad de sus principales nociones, en algunos casos por vez primera. Al mismo tiempo, nuestra investigación ha contribuido al progreso de los instrumentos que se deben poner a disposición de los profesores para mejorar el rendimiento didáctico de los estudiantes. Esperamos que este artículo haya mostrado cómo el estudio del problema de la praxeología didáctica del profesor es una vía fecunda para prosperar en el análisis didáctico y para mejorar las prácticas de estudio de las matemáticas.

NOTA

* Este artículo es un resumen de un trabajo de tesis doctoral realizado en el Departamento de Didáctica de las Matemáticas y las Ciencias Experimentales de la Universidad Autónoma de Barcelona.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARTIGUE, M. et al. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos, en Gómez, P. (ed.). *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas,* pp. 97-140. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericana

BROUSSEAU, G. (1990). Le contrat didactique: Le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9(3), pp. 308-336.

BROUSSEAU, G. (1998). *Théorie des situations didactiques.* Grenoble: La Pensée Sauvage.

CHEVALLARD, Y. (1985). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné.* Grenoble: La Pensée Sauvage.

CHEVALLARD, Y., BOSCH, M. y GASCÓN, J. (1997). *Estudiar matemáticas: el eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje.* Barcelona: ICE - Horsori.

CHEVALLARD, Y. (1998), Familière et problématique, la figure du professeur. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 17(3), pp. 17-54.

DAVIDOV, D. et al. (1982).*Formación de la actividad docente de los escolares*. La Habana: Pueblo y Educación.

DREYFUS, T. (1990). Advanced Mathematical Thinking Processes, en Nesher, P. y Kilpatrick, J. (eds.). *Mathematics and Cognition*, pp. 113-133. Cambridge: Cambridge University Press.

DREYFUS, T. (1991). Advanced Mathematical Thinking Processes, en Tall, D. (ed.).*Advanced Mathematical Thinking*, pp. 25-41. Dordrecht: Kluwer Academic Press.

ESPINOZA, L. (1994). *Un estudio del sistema de enseñanza secundario en torno al concepto* límite de función. Tesis de maestría. Directora: Dra. Carmen Azcárate. Universitat Autònoma de Barcelona.

ESPINOZA, L. y AZCÁRATE, C. (1995). A Study on the Secondary Teaching System about the Concept of Limit. *19th-PME Conference Proceedings,* 2, pp. 11-17. Brasil.

ESPINOZA, L. (1998*), Organizaciones matemáticas y didácticas en torno al objeto* límite de función. *Del pensamiento del profesor a la gestión de los momentos del estudio.* Tesis doctoral. Directora: Dra. Carmen Azcárate. Universitat Autònoma de Barcelona.

GALPERÍN, P. (1982).*Introducción a la psicología.* La Habana: Pueblo y Educación.

Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (1992). Nueva York: Macmillan Publishing Company.

LEONTIEV, A. (1975). *Actividad, conciencia, personalidad*. Moscú: Politizdat.

MARCELO, C. (1987).*El pensamiento del profesor.* Barcelona: CEAC.

MARGOLINAS, C. (1994). Jeux de l'élève et du professeur dans une situation complexe. *Séminaire Dida Tech*, 158. Grenoble: Université Joseph Fourier.

TALL, D. (1991), The Psychology of Advanced Mathematical Thinking, en Tall, D. (ed.).*Advanced Mathematical Thinking*, pp. 3-21. Dordrecht: Kluwer Academic Press.

TALL, D. (1994). Understanding the Processes of Advanced Mathematical Thinking.*Lecture at the International Congress of Mathematicians*. Zurich.

[Artículo recibido en junio de 1998 y aceptado en agosto de 2000.]